マージングネットワークにおけるある下界について(計算量理論の諸相 : その基礎的研究)

AUTHOR(S):

水野, 響; 増田, 一寿; 岩田, 茂樹

CITATION:

水野, 響 ...[et al]. マージングネットワークにおけるある下界について(計算量理論の諸相 : その基礎的研究). 数理解析研究所講究録 1996, 943: 63-72

ISSUE DATE:

1996-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60167

数理解析研究所講究録
943 巻 1996 年 63-72

マージング ネットワークにおけるある下界について

水野 響 (Hibiki Mizuno), 増田 一寿 (Kazuhisa Masuda), 岩田 茂樹 (Shigeki Iwata)
(電気通信大学 情報工学科)

1 あらまし

Floyd[1, p.230] により, (6,6)-マージング ネットワークの最小比較器数は 16 以上であることが知られていたが, 本稿ではそれが 17 であることを証明する。

2 はじめに

あらかじめソートされた m 個の要素 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$ と n 個の要素 $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ とを入力とし,$m+n$ 要素のソートされた数列 $z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{m+n}$ を出力するネットワークを (m,n)–**マージング ネットワーク**という ([1,p.230]) 。(m,n)–マージングネットワークを構成するのに必要な最小比較器数を $M(m,n)$ とする。Batcher[2] は $odd-even$ 法により, (m,n)– マージング ネットワークの最小比較器数の上限を示した。また, Yao and Yao[3] は, $M(2,n)=\lceil\frac{3}{2}n\rceil$ を, Miltersen, Paterson, and Tarui[4] は, $M(n,n)=n\log n+O(n)$ を示した。これらにより, $M(1,1)=1, M(2,2)=3, M(3,3)=6, M(4,4)=9, M(5,5)=13, M(7,7)=21$ は既に知られていたが, $M(6,6)$ に関しては $16 \leq M(6,6) \leq 17$ が知られているだけだった。本稿では $M(6,6)=17$ を証明する。(m,n)–マージング ネットワークにおいて, 入力が $z_i \in \{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ である水平の線 (入力線) を $line\ z_i$ と呼ぶ。また, 上端が $line\ z_i$ で, 下端が $line\ z_j$ (ただし, $z_i,z_j \in \{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ かつ $line\ z_i$ は $line\ z_j$ より上にあるものとする) の比較器 (comparator) を $[z_i:z_j]$ と書く。$\uparrow z_i$ は比較器の上端が $line\ z_i$ かまたはそれより上であることを示し, $\downarrow z_i$ は比較器の下端が $line\ z_i$ かまたはそれより下であることを示し, 比較器を表すのに $[\uparrow z_i : \downarrow z_j]$ の書き方もできるものとする。(m,n)–マージング ネットワーク N を図示したとき, N の入力線が上から順に $z_1,z_2,\cdots,z_i,x_k,y_\ell,z_{i+1},\cdots,z_{m+n-2}$(または $z_1,z_2,\cdots,z_i,y_\ell,x_k,z_{i+1},\cdots,z_{m+n-2}$ の順で, $z_i \in \{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n\}-\{x_k,y_\ell\}$ かつ $1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n$ のとき,$line\ x_k, line\ y_\ell$ からなるサブネットワークには, 比較器 $[x_k:y_\ell]$(または $[y_\ell:x_k]$, 各々) が存在する。これを N の**必須比較器 (essential comparator)** という。必須比較器でない比較器を**選択比較器 (selective comparator)** という。

さらに (m,n)–マージング ネットワークの入力線が上から順に $line\ z_1, line\ z_2,\cdots, line\ z_{m+n}$ (ただし, $z_1,z_2,\cdots z_n \in \{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$) であるとき, このネットワークの入力 Z を $Z=\langle z_1,z_2,\cdots,z_{m+n} : p(z_1,z_2,\cdots,z_{m+n})\rangle$ で表す。ただし, $p(z_1,z_2,\cdots,z_{m+n})$ は $z_1,z_2,\cdots,z_{m+n}$ の大小関係を示す条件である。

(m,n)–マージング ネットワーク N に 2 個の比較器 α,β が存在して, α の上端 (または下端), β の上端 (または下端) が N 上の同一の水平線上にあり, α が β より入力側に近い方にあるとき, $\alpha \prec \beta$ と書く。

3 準備

補題 1. $M(m+2,n+1) \geq M(m+1,n)+3 \quad (m,n \geq 1)$

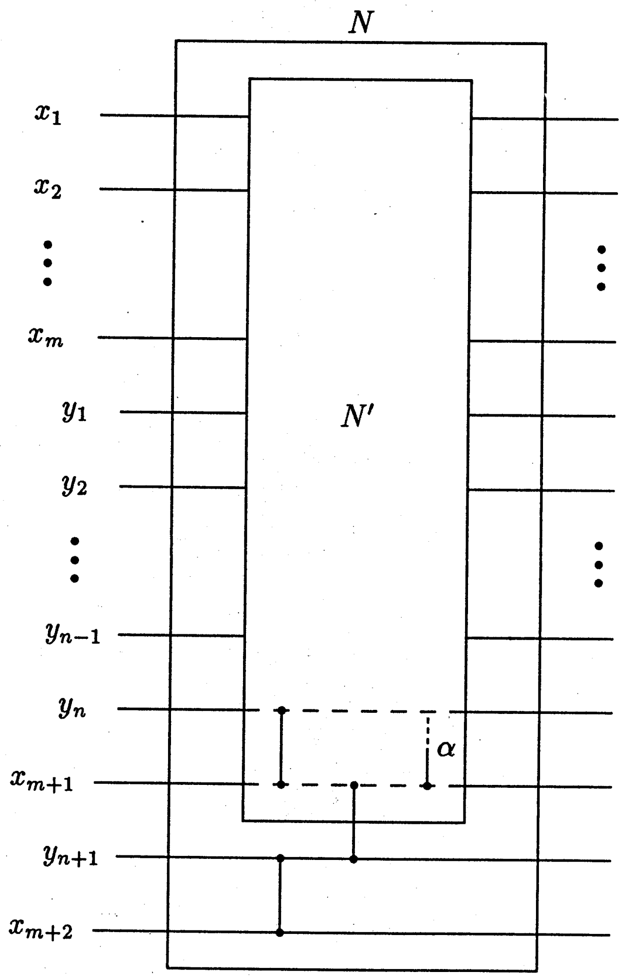

図1 $(m+2, n+1)$–マージング ネットワーク

証明. $m, n \geq 1$ とする。Floyd [1] より $M(m+2, n+1) \geq M(m+1, n)+2$ が成立する。$M(m+2, n+1) = M(m+1, n)+2$ と仮定し, $M(m+1, n)+2$ 個の比較器で構成される $(m+2, n+1)$–マージング ネットワークを Nとする。また, Nの入力線を上から順に *lines* $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n, x_{m+1}, y_{n+1}, x_{m+2}$とする。$N$には必須比較器$[x_{m+1} : y_{n+1}], [y_{n+1} : x_{m+2}]$が存在する。また, Nから下の 2*lines* を除いた$(m+n)$*lines* からなるサブネットワーク N' 上に $M(m+1, n)$ 個の比較器が存在するので, Nにはこれ以上の比較器は存在しないことになる。$x_{m+1} \leq y_n$となる入力を考えれば, $[y_n : x_{m+1}] \prec [x_{m+1} : y_{n+1}] \prec [\uparrow y_n : x_{m+1}]$ である。ところが, N'は $M(m+1, n)$ 個の比較器で構成されるが, N'中の比較器 $[\uparrow y_n : x_{m+1}]$ は要素の交換が起きない。すなわち N' から $[\uparrow y_n : x_{m+1}]$ を取り除いたネットワークも $(m+1, n$–マージング ネットワークとなり, $M(m+1, n)-1$ 個の比較器で構成される。これは $(m+1, n)$–マージング ネットワークの最小比較器数が $M(m+1, n)$ であることと矛盾する。よって補題は証明された。(証明終)

系 1. $M(4,3) = 8$

証明. Batcher により,$M(4,3) \leq 8$ が既にわかっている。[5] により, $M(3,2) = 5$ なので, 補題 1 より $M(4,3) = 8$が得られる。

補題 2. 3 個の比較器で構成される $(2,2)$–マージングネットワークは 1 通りであり, 図 2 に示す。

証明. 入力線が上から順に, x_1, y_1, x_2, y_2 の $(2,2)$– マージング ネットワークを Nとし, Nの必須比較器を $A = [x_1 : y_1], B = [y_1 : x_2], C = [x_2 : y_2]$ とする。Nの入力が $\langle x_1, y_1, x_2, y_2 : y_1 < y_2 < x_1 < x_2 \rangle$ のとき, 要素 x_1 は, 最終的に *line* x_2へ移動するので, $A \prec B$かつ, $C \prec B$となる。従って, 3 個の比較器で構成される $(2,2)$– マージング ネットワークは図 2 に示す 1 通りである。(証明終)

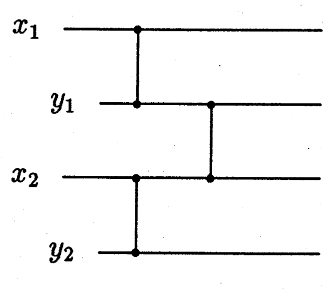

図 2 3 個の必須比較器で構成される $(2,2)$–マージング ネットワーク

補題 3. 6 個の比較器で構成される $(3,3)$–マージングネットワークは 4 通りであり, 図 3 に示す。

証明. 入力線が上から順に, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$で, 比較器数が 6 の $(3,3)$– マージングネットワークを Nとする。Nには 5 個の必須比較器 $[x_1 : y_1], [y_1 : x_2], [x_2 : y_2], [y_2 : x_3], [x_3 : y_3]$ と 1 個の選択比較器が存在する。Nの 3 個のサブネットワーク, *lines* x_1, y_1, x_2, y_2で構成されるサブネットワーク (1), *lines* y_1, x_2, y_2, x_3で構成される Nのサブネットワーク (2), *lines* x_2, y_2, x_3, y_3で構成されるサブネットワーク (3), に着目すると, これらはすべて, $(2,2)$– マージングネットワークだとわかる。選択比較器が $[x_1 : y_3]$ のとき, 補題 2 より, *lines* x_1, y_1, x_2, y_2で構成されるサブネットワークと, *lines* y_1, x_2, y_2, x_3で構成されるサブネットワークのうち, 少なくとも 1 個が $(2,2)$–マー

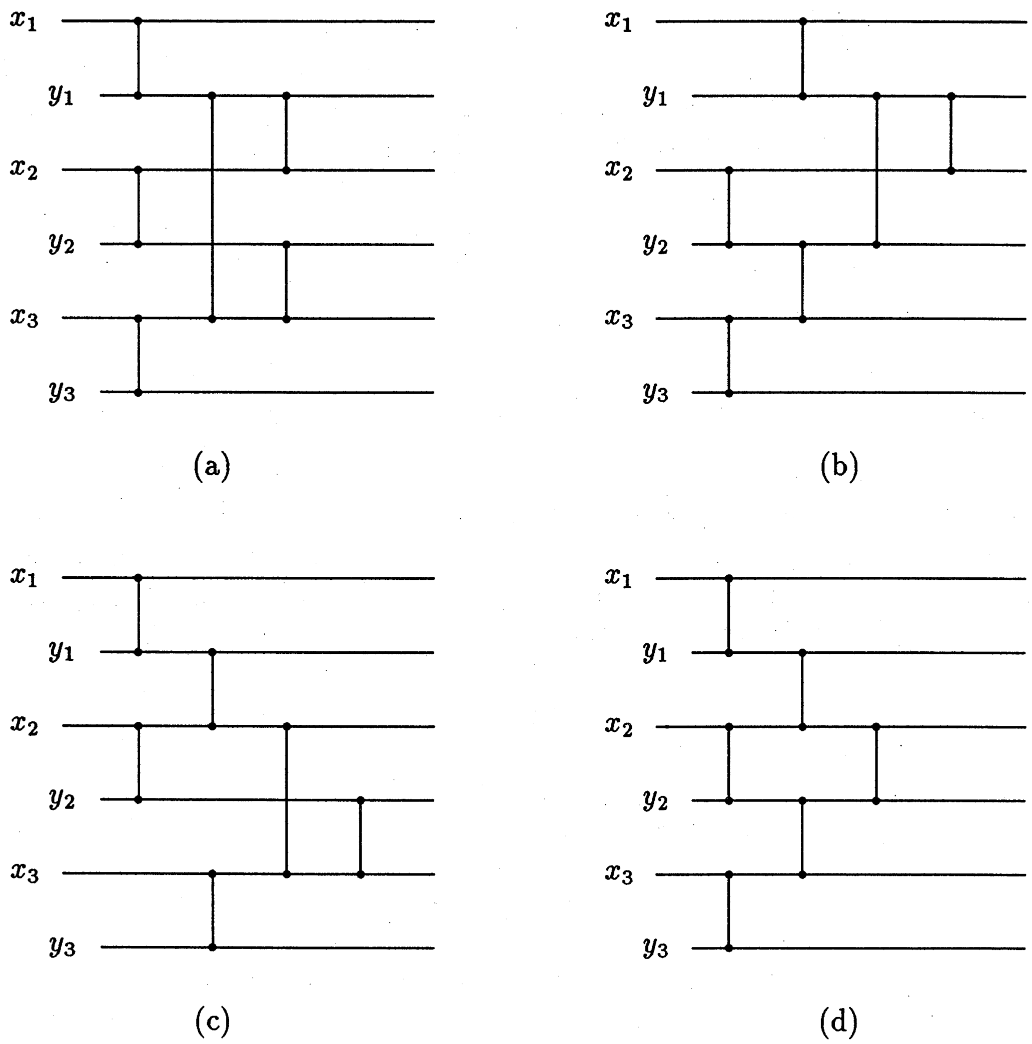

図 3　6 個の比較器で構成される (3, 3)−マージング ネットワーク

ジング ネットワークを構成できなくなる。選択比較器$[x_1 : y_3]$は$(2,2)-$マージング ネットワークを構成するのに役に立たないことに注意する。従って, 選択比較器が$[x_1 : y_3]$のときは, $(3,3)-$マージング ネットワークを6比較器で構成できない。同様にして, 選択比較器が$[y_1 : y_3], [x_2 : y_3], [y_2 : y_3]$かまたは$[x_3 : y_3]$のときも$(3,3)-$マージング ネットワークを6比較器で構成できないことが示せる。

対象性から, 選択比較器が$[x_1 : x_3], [x_1 : y_2], [x_1 : x_2]$かまたは$[x_1 ; y_1]$のときも同様に$(3,3)-$マージング ネットワークを6比較器で構成できない。

選択比較器が$[y_1 : x_2]$のときを考える。$lines x_2, y_2, x_3, y_3$で構成されるサブネットワークが, $(2,2)-$ マージング ネットワークなので, $[x_2 : y_2] \prec [y_2 : x_3]$となる。ここで, Nの入力$\langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 : x_1 < x_2 < x_3 < y_1 < y_2 < y_3 \rangle$を考えると, Nは$(3,3)-$マージングネットワークなので, 要素x_3は最終的に$line x_2$に移動する。ところが, $line y_2$に接続している比較器は$[x_2 : y_2]$と$[y_2 : x_3]$のみで, $[x_2 : y_2] \prec [y_2 : x_3]$となっているので, 要素$x_3$は$line x_2$へ移動できない。これは$N$が$(3,3)-$マージング ネットワークということと矛盾する。同様に, 選択比較器が$[y_2 : x_3]$のときも, $(3,3)-$マージング ネットワークを6比較器で構成できないことが示せる。

残りの場合, つまり選択比較器が$[y_1 : y_2], [x_2 : x_3], [y_1 : x_3]$かまたは$[x_2 : y_2]$のときは, 4通りすべての場合に各々1個だけ, 図3で示される6比較器で構成される$(3,3)-$マージング ネットワークが存在する。詳細部分については, 読者の皆様の手に委ねることとする。(証明終)

補題 4. 8個の比較器で構成された$(4,3)-$マージング ネットワークをNとし, Nの入力を上から順に$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4$とする。$N$に必須比較器$A = [y_3 : x_4]$と, 選択比較器$\alpha = [\uparrow y_3 : x_4]$とが存在するとき, $\alpha \prec A$である。

証明. $A \prec \alpha$とする。Nの入力要素の中で最大のものはy_3, x_4のいずれかであるので, 必須比較器Aによって, y_3, x_4のうち大きい方が$line\ x_4$へ移動する。従って, 選択比較器αは要素の交換が起きない比較器である。すると, 選択比較器αの存在の有無に関わらず, Nは$(4,3)-$マージングネットワークとなるので, $(4,3)-$マージングネットワークは7個の比較器で構成できることになる。これは系1と矛盾する。(証明終)

4 結果

本節では, 主定理の$M(6,6) = 17$を示す。

定理 . $M(6,6) = 17$

証明. Floyd [1], Batcher [2] により, $16 \le M(6,6) \le 17$であることは既に判明している。よってここでは$M(6,6) = 16$と仮定する。16個の比較器で構成される$(6,6)-$マージング ネットワークをNとし, Nの入力を上から順に$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_6, y_6$とする。すると$N$には11個の必須比較器と, 5個の選択比較器が存在する。$N_1 (N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$を$N$の上から5本の入力線($N$の下から7本の入力線, Nの上から7本の入力線, Nの下から5本の入力線, Nの上から6本の入力線, Nの下から6本の入力線, 各々)で構成されるNのサブネットワークとする。N_1, N_4は各々, $(3,2)-, (2,3)-$マージング ネットワークであり, N_2, N_3は各々, $(3,4)-, (4,3)-$マージング ネットワークであり, N_5, N_6は両方とも$(3,3)-$マージング ネットワークである。従って,Yao and Yao[3]によりN_1とN_4は5個以上の比較器を持ち, N_2とN_3は8個以上の比較器を持つ。仮定とFloyd [1]により, N_1は5個の比較器を持ち, N_2は8個の比較器を持ち, $line\ x_3$と$line\ y_3$間には3個の比較

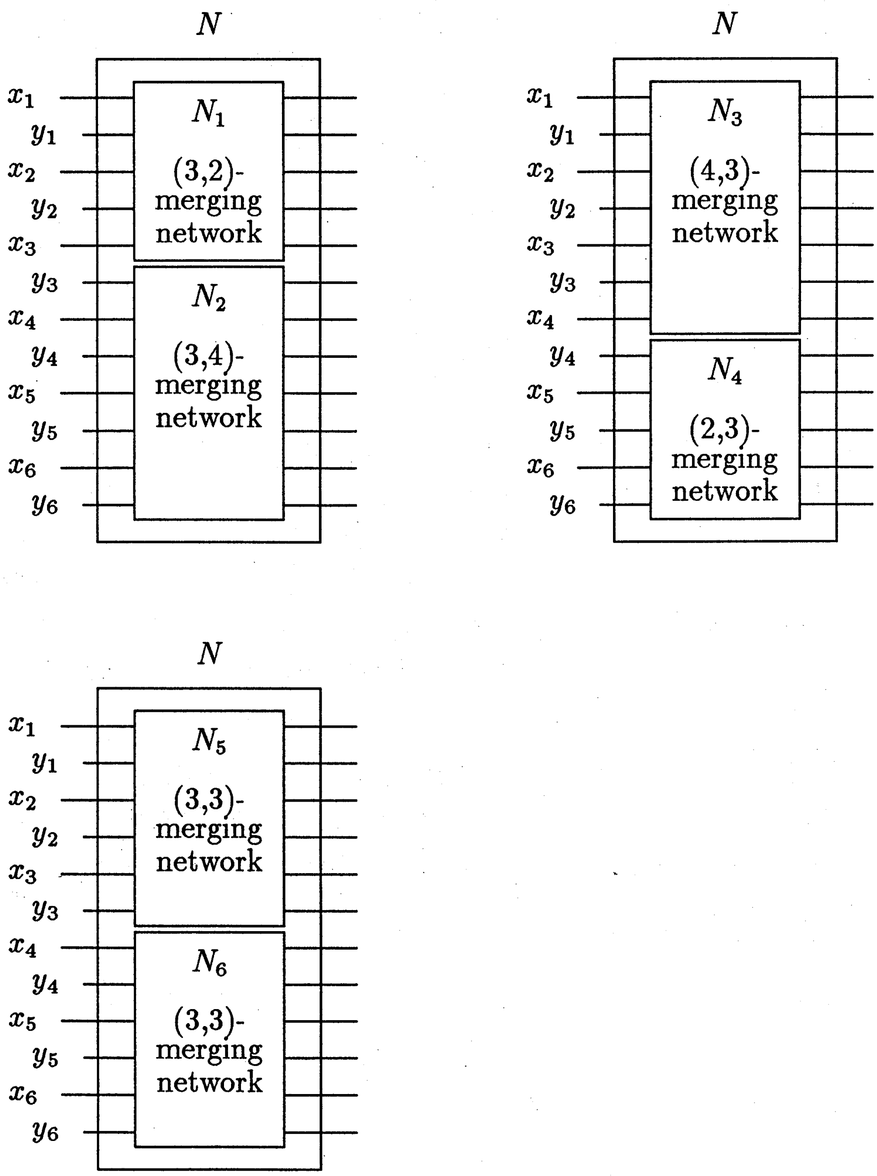

図4 Nとそのサブネットワーク

器があるとがわかる。ここで $Z_1 = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, y_6, x_6 : y_1 < y_2 < \cdots < y_6 < x_1 < x_2 < \cdots < x_6 \rangle$ を Nの入力としたとき, 次の性質 1,2,3 が成立する。

性質

(1)N の入力が Z_1のとき, *line* x_3,*line* y_3間には 3 個の比較器が存在し, それらの比較器により N_1側から N_2側へ要素 x_1, x_2, x_3が移動し, N_2側から N_1側へは要素 y_3, y_4, y_5 が移動する。

(2)N の入力が Z_1のとき, *line* x_4,*line* y_4間には, 3 個の比較器が存在し, それらの比較器により N_3側から N_4側へ要素 x_2, x_3, x_4 が移動し, N_4側から N_3側へは要素 y_4, y_5, y_6 が移動する。

(3)N の入力が Z_1のとき, *line* y_3,*line* x_4間には, 3 個または 4 個の比較器が存在し, それらにより N_5側から N_6側へ要素 x_1, x_2, x_3 が移動し, N_6側から N_5側へは要素 y_4, y_5, y_6 が移動する。

line x_3と *line* y_3の間にある比較器を A, α, βとし, $A = [x_3 : y_3]$ を必須比較器, α, βを選択比較器とする。同様に *line* x_4と *line* y_4の間にある比較器を C, γ, δとし, $C = [x_4 : y_4]$ を必須比較器, γ, δ を選択比較器とする。また, 必須比較器 $B = [y_3 : x_4]$ とする。$\alpha, \beta, \gamma, \delta$をすべて異なる比較器だとすると, N_1, N_4に含まれる比較器が 10 個, $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$で 7 個の計 17 個の比較器が Nに存在することになる。これは仮定に反する。一般性を失わず, $\alpha = \delta = [\uparrow x_3 :\downarrow y_4]$ と仮定してよい。

命題. $\beta \neq \gamma$

証明. $\beta = \gamma$ と仮定する。すると$\beta(= \gamma) = [\uparrow x_3 :\downarrow y_4]$ である。N_1が 5 個の比較器を持っており, N_2が 8 個の比較器を持つことから, *line* y_3と *line* x_4の間には, 選択比較器$\varepsilon = [y_3 : x_4]$ が存在する。

Nのサブネットワーク N_3は 8 個の比較器からなる。このうち $B = [y_3 : x_4]$ であり, かつ $\varepsilon = [y_3 : x_4]$ である。$\varepsilon \prec B$ とする。補題 1 の証明を同様にすると, N_3 ではどの入力に対してもεではデータの交換は起きない。よって, N_3 からε を除いた 7 個の比較器からなるサブネットワークも $(4,3)$–マージング ネットワークである。これは系 1 と矛盾する。$B \prec \varepsilon$ のとしても同様である。(証明終)

命題 1 より $\beta \neq \gamma$である。よって Nには N_1の 5 個の比較器と N_4の 5 個の比較器と $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ の 6 個の比較器の計 16 個の比較器が存在し, $\beta = [\uparrow x_3 :\downarrow y_3], \gamma = [\uparrow x_4 :\downarrow y_4]$ である。性質 (3) より, 以下の 3 つの場合が考えられる。

(1)$\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [x_4 :\downarrow y_4]$
(2)$\beta = [\uparrow x_3 : y_3], \gamma = [y_3 :\downarrow y_4]$
(3)$\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [y_3 :\downarrow y_4]$

場合 1. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [x_4 :\downarrow y_4]$ のとき
この場合は, *line* y_3と *line* x_4の間に存在する比較器は B, α, βの 3 本なので, 性質 (3) の代わりに次の性質 (3)' が成立する。

性質 (3)'. 入力 Z_1のとき, N_5から N_6へ移動する要素 x_1, x_2, x_3と N_6から N_5へ移動する要素 y_4, y_5, y_6は B, α, βを通る。

入力が Z_1の要素 x_1は最終的に *line* x_4 に移動する。性質 (2) より, x_1が Cかまたは γを通って *line* x_4 へ移動することはない。

x_1が Bを通って *line* x_4へ移動するとする。A と B は *line* y_3 に端を持つ比較器であるので, x_1は A を通ってから Bを通るので $A \prec B$である。ここで, 図 2 を考えると, x_1は A の左の位置で *line* x_3に移動できないことがわかる。x_1がβを通るとすると, 補題 4 より$\beta \prec B$である。よって,β

より右側に *line* x_4に端を持つ比較器が最低 1 個存在する。これは x_1がβより右側の比較器で移動しないか, β以外の比較器で最終的に *line* x_4に移動することを意味する。これは性質 (2), (3)' に反する。従って, この場合では $(6,6)-$マージングを 16 個の比較器で構成できない。

場合 2. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : y_3], \gamma = [y_3 :\downarrow y_4]$ のとき

場合 1 と対称であり, 場合 1 と同様に, Nが (6,6)-マージングネットワークでないことを示せる。

場合 3. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [y_3 :\downarrow y_4]$ のとき

N_3は 8 個の比較器を持っているので, 補題 4 から $\beta \prec B$ である。再び, Nの入力 Z_1を考える。要素 x_1が Bを通って *line* x_4 へ移動するなら, 場合 1 の後半部分の証明と同様に Nが $(6,6)-$ マージング ネットワークでないことを示せる。x_1が β を通ってから最終的に *line* x_4に移動すると仮定すると, $\beta \prec B$なので, Bは入力 Z_1のときに要素の交換が起きない。性質 (1), (2) より入力 Z_1のもとでは A, α ともに要素の交換が起こる。B以外に A, γ の 2 個の比較器が *line* y_3 に接する。従って入力 Z_1中の x_2 かまたは x_3は, A を通ってから γ を通る。従って $A \prec \gamma$ である。また, 補題 4 から $\gamma \prec B$なので $A \prec B$を得る。

ここで, *lines* y_2, x_3, y_3, x_4で構成されるサブネットワーク N_7を考える。N_7は $(2,2)-$マージング ネットワークである。必須比較器 $[y_2 : x_3]$ を Dとする。N_7には比較器 A, B, D と, 場合により β が存在する。N_5 は 6 比較器の $(3,3)-$マージング ネットワークなので, 補題 3 よりどの場合でも $A \prec D$ である。$A \prec D, A \prec B, \beta \prec B$ をすべて満たした上で, A, B, C, β で構成できる $(2,2)-$マージング ネットワークは (1) $\beta = [x_3 : x_4]$ かつ $D \prec \beta$, と (2) $\beta = [y_2 : x_4]$ かつ $\beta \prec D$ の 2 通りの場合がある。これらを図 5 に示す。

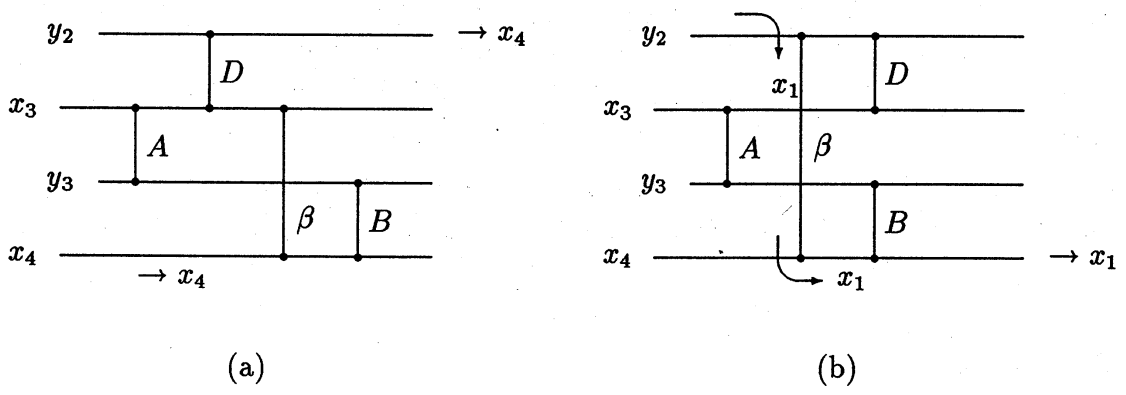

図 5 サブネットワーク N_7

場合 3-1. $\beta = [x_3 : x_4]$ かつ $D \prec \beta$のとき

Nの入力 $Z_2 = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_6, y_6 : x_1 < x_2 < \cdots < x_6 < y_1 < y_2 < \cdots < y_6 \rangle$ を考える。このとき, x_4は最終的に *line* y_2へ移動する。入力が Z_2のとき, x_4 は *line* x_4より下に移動しない。よって, x_4は B かまたは β を通る。x_4 がβ を通って上の入力線に移動するなら, 補題 3 より $[\uparrow y_2 : x_3] \prec D$である。$N_5$は 6 個の比較器で構成される $(3,3)-$マージング ネットワークであることに注意する。すると x_4は *line* y_2へ移動できない。x_4が Bを通って上の入力線に移動するなら, 補題 3 より, A 以外に $[\uparrow x_3 : y_3]$ の形の比較器は存在せず, $A \prec B$ なので x_4は *line* x_2への移動が不可能になる。従って, この場合 Nは $(6,6)-$マージング ネットワークをとなり得ない。

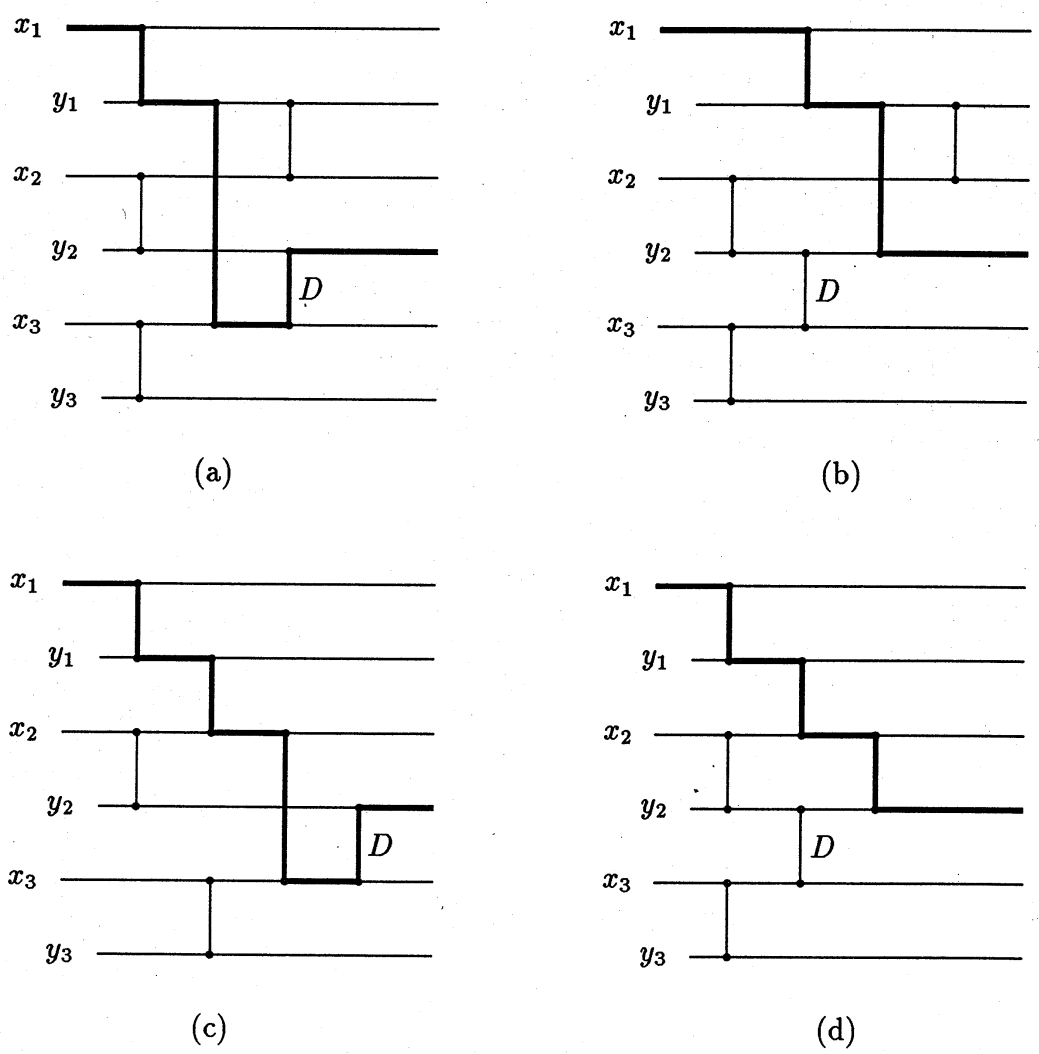

図6 (3,3)−マージング ネットワーク上で要素 x_1が *line* y_2へ移動する移動経路

場合 3-2. $\beta = [y_2 : x_4]$ かつ $\beta \prec D$ のとき

Nの入力 Z_1を考えると, 要素 x_1は, 最終的に *line* x_4 へ移動する。x_1 が β を通って *line* x_4へ移動することは既に示している。N_5は 6 個の比較器で構成されている (3,3)−マージング ネットワークなので, 補題 3 より x_1は比較器 Dより左の位置で *line* y_2に移動することはできない。従って, この場合 Nは (6,6)−マージング ネットワークとなり得ない。

以上より,(6,6)−マージング ネットワークが 16 個以下の比較器で構成できないことが示された。よって, $M(6,6) = 17$ である。(証明終)

参考文献

[1] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol.3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley (1973). [2] K.E. Batcher, Sorting networks and their applications, *Proc. AFIPS 1968 SJCC* **32** AFIPS Press (1968), 307–314. [3] A.C. Yao and F.F. Yao, Lower bounds on merging networks, *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976) 566–571. [4] P.B. Miltersen, M. Paterson and J. Tarui, The asymptotic complexity of merging networks, *Proc. 33rd Found. of Comput Science*(1992),236–246. [5]M. Aigner and O. Schwarzkoph, Bounds on the size of merging networks, submitted to a journal.